

## VISCOSITA E STRATO LIMITE APPROCCIO MACROSCOPICO E MOLECOLARE

Abbiamo capito che per spiegare la portanza di un aereo possiamo considerare l'aria un fluido incompressibile, a densità e pressione costante (quella atmosferica)<sup>1</sup> se siamo lontani abbastanza dallo strato limite, e cioè, per la massa d'aria che circonda l'aereo e che viene coinvolta nella circolazione (può arrivare a 3-7 metri sopra l'aereo a secondo della grandezza di questo e della velocità). Quindi, l'aria si comporta in questo caso come un fluido "ideale", in viscido, Newtoniano<sup>2</sup> al quale possiamo applicare l'ipotesi di continuità; a tutti gli effetti l'aria è un oggetto macroscopico, che ubbidisce alle leggi della termodinamica e dell'idrodinamica, ed si regge dalle equazioni di Eulero (dal momento che lo consideriamo in viscido).

All'interno dello strato limite (che può essere spesso da qualche mm a qualche cm a secondo della velocità), invece, sappiamo che l'aria non si può più considerare un fluido in viscido. Anzi, è proprio la viscosità che gioca un ruolo fondamentale ed spiega la formazione dello strato limite facendo uso della cosiddetta "non-slip condition" (vale a dire, il fluido a contatto con la superficie è fermo, ovvero ha velocità nulla), e di conseguenza le linee di flusso si piegano seguendo la curvatura della superficie (vale anche se la superficie è piatta), si crea un gradiente di velocità tra la superficie e il confine dello strato limite. ...., ecc (come spiegato nel precedente riassunto). Anche se quindi non è più valido considerare l'aria senza viscosità, la stiamo considerando ancora un oggetto macroscopico, regolato dalle leggi dell'idrodinamica, più in particolare, retto dalle equazioni di Navier-Stokes (per un fluido viscoso). In più continuiamo ad applicare l'ipotesi del fluido come un continuo.

Da un punto di vista termodinamico, l'equazione di stato per il fluido ci permette di dedurre le sue proprietà (viscosità, conducibilità, compressibilità e via dicendo) conosciute le condizioni a contorno macroscopiche (P-T, T-densità, P-densità).

Cosa significa però l'affermazione "l'aria a contatto con la superficie ha velocità zero" ?

L'aria è fatta di molecole (per quello che ci interessa non dobbiamo scendere alla scala atomica) e queste, secondo la teoria cinetica classica, sono in continuo movimento. Dalle collisioni tra le molecole c'è un continuo scambio di momento, che, nel caso di una deviazione dallo stato di equilibrio (descritto dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann) serve a ripristinare la situazione di equilibrio. Il gas viene così descritto da una funzione di distribuzione delle velocità delle molecole, e lo scambio di momento avviene seguendo l'equazioni di trasporto di M-B.

Un parametro fondamentale in gioco è il libero cammino medio (o tempo di collisione) cioè, la distanza che una molecola percorre liberamente, cioè in linea retta, (o il tempo che passa) prima di collidere con un'altra molecola. Per esempio: nel idrogeno a temperatura e pressione ambiente il libero cammino medio è dell'ordine di  $10^{-5}$  (mille volte il diametro della molecola) e il tempo di collisione è dell'ordine di  $6 \times 10^{-6}$  secondi. Nella collisione c'è uno scambio di momento ed energia tra le due molecole (o tra una molecola d'aria e quella della parete se c'è un contenitore o una superficie) rimanendo costante il momento e l'energia totale delle due molecole. Non abbiamo parlato finora del fatto che le molecole sono sottoposte a delle forze intermolecolari (le forze di Van der Waals) che sono attrattive a distanze moderatamente corte, e repulsive a distanze molto corte; quando le molecole sono vicine circa due (?) raggi molecolari, sono attratte tra di loro, ma oltre questa distanza sentono il potenziale repulsivo (hard-core) e ciascuna se ne va per i fatti suoi.

---

<sup>1</sup> Naturalmente la densità dell'aria cambia con l'altitudine con conseguenze notevoli per la portanza, ma data una quota fissa, la possiamo considerare costante

<sup>2</sup> Vedere appendice per definizione di fluido Newtoniano

Chiarimento: intendiamo che in condizioni normali di pressione, densità e temperatura di un gas, l'energia cinetica delle molecole è molto maggiore dell'energia potenziale del potenziale intermolecolare. Di conseguenza, le molecole si scontrano, scambiando momento, ed è trascurabile l'effetto delle forze intermolecolari (non rimangono intrappolate durante lo scontro).

Considerando l'ordine di grandezza del libero cammino medio per un gas, risulta chiaro che in questi il meccanismo fondamentale d'interazione è quello dello "scontro" meccanico a due corpi, mentre l'interazione molecolare è pressoché trascurabile, considerando anche che gli scontri sono piuttosto "fugaci". Non possiamo dire lo stesso per un liquido. Per la stessa definizione di liquido (le molecole del fluido sono in coesione), il discorso è proprio l'opposto. Come facciamo a parlare di libero cammino medio in un liquido quando le molecole sono costantemente a contatto una con l'altra? Qui, contrariamente ai gas, sono proprio le forze molecolari a giocare il ruolo fondamentale, per che i tempi di collisioni sono zero! Sono le forze repulsive e attrattive tra le molecole a coordinare il meccanismo di dissipazione di qualsiasi variazione dall'equilibrio.

Arriviamo piano a piano a visualizzare che il fenomeno chiamato viscosità, da un punto di vista molecolare, assume un aspetto completamente diverso se il fluido in questione è un gas o un liquido. In un gas la viscosità equivale al trasporto di momento tra coppie di molecole. In un liquido, la viscosità appare sotto forma di "frizione" tra molecole, un vero e proprio "stress" che inoltre si propaga da molecola a molecola deformando il liquido, mentre le molecole del gas, dopo che si sono scontrate, tornano ad essere sole e imperturbate fino ad un nuovo scontro.

Cerchiamo quindi di capire quali sono i meccanismi alla base della viscosità nei fluidi, cioè i processi fisici che avvengono tra le molecole di un fluido, sia questo a riposo, in movimento e/o sottoposto o meno alla azione di una forza esterna.

Già intuitivamente, da tutto quello detto in precedenza, e dalla nostra esperienza quotidiana, il comportamento viscoso dei fluidi è diverso se questo è un liquido o un gas. La viscosità di un liquido diminuisce con la temperatura, mentre aumenta per un gas. I liquidi sono incompressibili, mentre i gas si possono comprimere. In ogni caso, i processi meccanici alla base del comportamento sia di un gas che di un liquido sono due:

1. il movimento delle molecole e
2. le forze intermolecolari

Il primo processo è alla base soprattutto del comportamento dei gas, mentre il secondo regola fondamentalmente quelli dei liquidi; e questo perché le molecole di un gas possono percorrere "lunghe" distanze, dell'ordine dei  $10^{-5}$  cm a pressioni normali, senza scontrarsi (due a due; gli scontri a tre corpi sono esclusi), mentre non è così per i liquidi, le cui molecole sono continuamente a contatto l'una con l'altra in maniera complessa. Quindi, mentre per un liquido sono le forze di Van der Waals, a reggere il comportamento del fluido, potendosi trascurare gli scambi di momento tra di esse, per un gas questi sono il meccanismo fondamentale di "termalizzazione" (che sia la  $T$  o la velocità media la grandezza in gioco) mentre sono trascurabili le forze intermolecolari.

Due strati di fluido che hanno una velocità diversa, messi a contatto, tenderanno a raggiungere nel tempo (irreversibilmente) una velocità finale uguale. Mentre nel gas questo avviene mediante lo scambio di momento negli urti tra due molecole di velocità diversa (e quindi il processo è retto dalla equazione del trasporto di Boltzmann per una data distribuzione di velocità), i due strati in un liquido tendono a trascinarsi uno con l'altro per diminuire lo stato di movimento relativo, portando ad una deformazione vera e propria della struttura molecolare del fluido (modellino: le molecole sono attaccate da piccolissime molle).

**La viscosità in un gas è il meccanismo che tende a ridurre la differenza di velocità macroscopica tra due punti di un fluido (trasporto di momento).**

**Come risultato degli scambi di momento tra le molecole, e considerando il fluido formato da particelle (cubetti) di fluido, ci saranno variazioni di pressione “locali” tra le particelle di fluido più lente e quelle più veloci, proprio per ripristinare l’equilibrio all’interno di ciascuna particella di fluido. Queste variazioni di pressione (gradienti di velocità normali ad una superficie, quella della particella di fluido) si possono esprimere in termini di tensori di stress (di svariati tipi e nomi) e coefficienti di viscosità (cinematica, dinamica, bulk e shear).**

\*\*\*\*\*

### Coefficienti di viscosità

(N.B. Il coefficiente di viscosità introdotto da Navier (1823) teneva conto del fatto che la pressione tende a ridurre le distanze tra le molecole. Questo provoca forze intermolecolari repulsive che secondo lui spiegavano la “mancanza di scivolamento” (lack of slipperiness, ovvero viscosità) del fluido, per cui aggiunse un termine dissipativo alla pressione che agisce su un volumetto di fluido

per tenere conto di questo:  $P\delta_{ij} \rightarrow P\delta_{ij} - \eta \frac{\partial v_i}{\partial r_j}$  dove  $\eta$  è il coefficiente di viscosità (shear

viscosity). Questo stesso termine fu introdotto da Stokes (1845) più tardi senza farne uso di alcun ragionamento molecolare, di cui la equazione di Navier-Stokes:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial r_i} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial r_j \partial r_j} \right) + f_i$$

Poisson (1831) poi introdusse un’altra costante di viscosità, diversa dalla “shear” viscosity, per tenere conto non solo delle forze di “shear” ma anche di quelle dovute alle contrazioni o espansioni del fluido. Abbiamo la *relazione di Stokes*, che da una proporzionalità tra il secondo coefficiente di viscosità e la “shear” viscosity :

$\eta' + \frac{2}{3}\eta = 0$ . Non c’erano misure di questo nuovo coefficiente di viscosità finché Tisza (1942),

facendo passare vibrazioni ultrasoniche attraverso dei fluidi, ottenne un nuovo coefficiente:

$$\zeta = \eta' + \frac{2}{3}\eta$$

chiamato *coefficiente di viscosità “bulk”* (che si misura dall’assorbimento dei suoni nei liquidi o nei gas). Una volta che fu introdotto il coefficiente di viscosità “bulk” da Tisza, gli esperimenti di asserzione del suono in gas poliatomici e liquidi furono quantitativamente spiegati, mentre c’erano grosse discrepanze quando si usava solo la “shear” viscosity.

L’equazione di Navier-Stokes più generale tiene conto del fatto che quando si esercita una forza di stress (tangenziale) in un piano (xy, per esempio), ci sarà un scivolamento nelle direzioni

perpendicolari a ciascuna delle direzioni che formano il piano:  $\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}$  nella direzione x e

$\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}$  nella direzione y. Quindi, oltre al tensore di pressione  $P_{xx} = P + 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}$  ci sarà:

$$P_{xy} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

In questo modo l'equazione di Navier-Stokes più generale è:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r_j} \left[ P\delta_{ij} - \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial r_l} \right) - \zeta \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial r_l} \right] + f_j$$

Quando il fluido è incomprimibile  $\frac{\partial v_l}{\partial r_l} = 0$  e si recupera l'equazione di Navier-Stokes.

Siamo sempre nell'ipotesi di un fluido Newtoniano, in cui c'è una relazione lineare tra "shear" stress e gradiente di velocità (ed è valido per una gran parte dei fluidi, compresi l'aria e l'acqua). Fluidi non-Newtoniani sono, per esempio, i polimeri, liquidi rheopectici (in cui la viscosità aumenta con lo stress, come per esempio una miscela concentrata di amido di mais e acqua); per conoscenza la reologia si occupa di fluidi non-Newtoniani.

\*\*\*\*\*

**La viscosità in un liquido è il risultato dell'azione delle forze di Van der Waals tra le molecole, che provoca il trascinamento tra due strati di fluido che scorrono a velocità diversa, per dissipare il movimento relativo tra di essi. La conseguenza di questo trascinamento è la vera e propria deformazione della struttura molecolare del fluido<sup>3</sup>. La deformazione è data dai tensori: "deviatoric stress tensor" (che tiene conto soltanto dello stress dovuto al movimento del fluido) e dello "rate-of-strain tensor" (che segna le variazioni di velocità lungo le diverse direzioni, due a due). Un fluido è Newtoniano quando c'è una relazione lineare tra questi due tensori. (da approfondire)**

*Quando è lecito usare la dinamica molecolare (modello microscopico) e quando l'idrodinamica classica (modello macroscopico) per descrivere il comportamento di un fluido?*

*E quanti livelli di comprensione possiamo avere dello stesso fenomeno mano a mano che la scala di misura si fa più piccola?*

Esiste un parametro che lo determina ed è il **coefficiente di Knudsen**. Questo coefficiente da il rapporto tra il libero cammino medio delle molecole e una lunghezza caratteristica del problema:

$$Kn = \lambda / L$$

dove  $\lambda$  è il libero cammino medio e L è la lunghezza caratteristica del problema. Quando Kn è grosso modo dell'ordine o maggiore di 1 l'ipotesi di continuità non è più valida e bisogna applicare la meccanica statistica.

**Cito:**

The influence of Knudsen number on the hydrodynamic development length within parallel plate micro-channels

R.W. Barber & D.R. Emerson

Centre for Microfluidics, CLRC Daresbury Laboratory, U.K.

.....

For an ideal gas modelled as rigid spheres, the mean free path of the molecules,  $\lambda$ , can be related to the temperature,  $T$ , and pressure,  $p$ , via

<sup>3</sup>Per esempio, se la struttura molecolare del fluido a riposo è sferica, quando due strati scorrono a velocità diversa ci sarà una deformazione di tipo ellissoidale; gli assi di deformazione vengono dati dai gradienti di velocità locali, ed i coefficienti di viscosità si ricavano dalla deformazione molecolare

$$\lambda = \frac{KT}{\sqrt{2\pi p\sigma_c^2}}$$

where

K is the Boltzmann's constant  $1.380662 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ ,

T is the temperature (K),

P is the pressure (Nm<sup>-2</sup>) and

$\sigma_c$  is the collision diameter of the molecules (m).

The continuum assumption in the Navier-Stokes equations is valid provided the mean free path of the molecules is smaller than the characteristic dimension of the flow domain. If this condition is violated, the fluid will no longer be under local thermodynamic equilibrium and the linear relationship between the shear stress and rate of shear strain (Newton's law of viscosity) cannot be applied. Velocity profiles, boundary wall shear stresses, mass flow rates and pressure differences will then be influenced by non-continuum effects. In addition, the conventional no-slip boundary condition imposed at the solid-gas interface will begin to break down even before the linear stress-strain relationship becomes invalid (Gad-el-Hak [6]).

The ratio between the mean free path,  $\lambda$ , and the characteristic dimension of the flow geometry,  $L$ , is commonly referred to as the Knudsen number,  $Kn$ :

$$Kn = \lambda/L$$

The value of the Knudsen number determines the degree of rarefaction of the gas and the validity of the continuum flow assumption. For  $Kn \leq 0.001$ , the continuum hypothesis is appropriate and the flow can be analysed using the Navier-Stokes equations with conventional no-slip boundary conditions.

However, for  $0.001 \leq Kn \leq 0.1$  (commonly referred to as the *slip-flow* regime) rarefaction effects start to influence the flow and the Navier-Stokes equations can only be employed provided tangential *slip-velocity* boundary conditions are implemented along the walls of the flow domain [6,7]. **Beyond  $Kn = 0.1$ , the continuum assumption of the Navier-Stokes equations begins to break down and alternative simulation techniques such as particle based DSMC (Direct Simulation Monte Carlo) approaches must be adopted.** Finally, for  $Kn \geq 10$ , the continuum approach breaks down completely and the regime can then be described as being a free molecular flow.

The analysis of developing flows at the entrance to rectangular ducts has received considerable attention over the years. Whilst most researchers have concentrated their efforts on the no-slip (continuum) flow regime, several studies have considered the hydrodynamic entrance problem under rarefied conditions where the momentum transport starts to be affected by the discrete molecular composition of the gas. For example, Ebert & Sparrow [8] formulated an analytical slip-flow solution for a rectangular channel whilst Quarmby [9] and Gampert [10] used finite-difference simulations to investigate developing slipflow in circular pipes and parallel plates. In the present investigation, the role of the Reynolds and Knudsen numbers on the hydrodynamic development length at the entrance to a parallel plate micro-channel is investigated.

Banalmente, per spiegare l'idrodinamica del volo, dove la lunghezza caratteristica è delle dimensioni dell'ala di un aereo, questo coefficiente è nullo e useremo l'equazioni dell'idrodinamica.

Cosa succede nello strato limite?

Lo spessore dello strato limite ( $\delta$ ) è dell'ordine di 0,5-1 cm, e quindi  $Kn=10^{-5}/0,5$  circa zero. Dentro lo strato limite possiamo quindi applicare ancora l'equazioni dell'idrodinamica (per un fluido viscoso).

Cosa succede sulla superficie dell'ala? Cosa succede alle particelle di fluido (che contengono milioni di molecole) che si trovano proprio a contatto con la superficie dell'ala?

Cosa avviene tra le molecole d'aria a contatto con la superficie dell'ala e quelle del materiale di cui questa è fatto?

Se il numero di Knudsen diventa dell'ordine di 0,1 dovremmo essere in grado di avvertire differenze di portanza a secondo se la superficie dell'ala è più o meno levigata, se ci sono rugosità, sporcizia, particelle di polvere, ecc.

Bisogna quantificare questo parametro.

(In questa referenza ne parla proprio di cristalli di silicio.....)

Se quindi potessimo applicare la meccanica statistica per spiegare la viscosità dell'aria come fenomeno di trasporto di momento tra le molecole (fluido-fluido e fluido-superficie), avremmo un quadro completo del fenomeno della portanza: dalla scala microscopica (molecolare) che usa la viscosità come fenomeno di base per spiegare il comportamento del fluido a contatto con la superficie, a quella mesoscopica (particelle del fluido) all'interno dello strato limite in cui gioca un ruolo la variazione di pressione locale, a quella macroscopica (equazioni dell'idrodinamica) a quella prettamente meccanica (circolazione e principi della dinamica).

#### **APPENDICE 1 : DEFINIZIONE DI FLUIDO NEWTONIANO**

Fluido newtoniano è quello che presenta una risposta lineare tra la forza applicata e lo "shear stress" provocato. L'acqua si può considerare un fluido newtoniano. Il bianco dell'uovo quando si fa a neve si comporta come un fluido non newtoniano. Anche i fluido rheologici (per esempio una miscela di acqua e amido di mais) si comporta in maniera non newtoniana.

#### **APPENDICE 2: VISCOSITA E TEORIA CINETICA (TRASPORTO DI MOMENTO)**

**Ref: Kerson Huang, Meccanica Statistica**